Le réalisme mathématique dans la philosophie de Ferdinand Gonseth / Sami Adham. — Extrait de : Annales de philosophie et des sciences humaines. — N° 2 (1988), pp. 150-162.

Notes au bas des pages.

I. Gonseth, Ferdinand, 1890-..... II. Mathématiciens — Suisse.

LE RÉALISME MATHÉMATIQUE DANS LA PHILOSOPHIE DE FERDINAND GONSETH

Sami ADHAM

Introduction

Pour Gonseth, non seulement les mots changent de sens, et les significations changent de vocables, mais les significations sont elles-mêmes en devenir. Les concepts les plus immuables sont aussi en devenir, de telle sorte que les concepts des mathématiques, considérés depuis longtemps comme fixes, évoluent et changent de signification.

Un nombre entier, considéré au stade intuitif et désignant un groupe d'objets concrets, sera, au stade rationnel, une forme pure. De même une ligne droite aura une nouvelle signification au stade axiomatique, l'être sensible deviendra un être logique, dont l'essence sera la non-contradiction au sein d'un système axiomatique et dont la signification sera divisée entre deux niveaux d'abstraction.

La signification d'un terme est ce qu'exprime ce terme, c'est l'essence de la chose désignée par ce terme, ou c'est l'essence de choses qui existent en un lieu ou en un temps. Au sens moderne, l'essence est loin de la chose en soi: «Mais, en définitive, l'essence comme raison de la série n'est que le lien des apparitions, c'est-à-dire elle-même une apparition. C'est ce qui explique qu'il puisse y avoir une intuition des essences (La *Wesenschau* de Husserl, par exemple)».[1]

En effet, la signification du terme «homme» est ce qui fait qu'un homme est un homme, c'est l'ensemble des possibilités et des réalités qui caractérisent le concept «homme». Certes, la signification, n'est pas donnée a priori, ce n'est pas une notion fermée, ou une idée achevée, car la possibilité que comporte ce concept, fera de lui un ensemble infini d'expériences et une infinité de possibilités. Il s'ensuit que la signification d'un terme, qui est l'essence du terme, doit

(1) *L'être et le néant,* Sartre, p. 12 (Introduction).

être considérée à l'état possible et à l'état concret réel. Cette essence n'est pas une substance fixe. C'est une essence donnée à l'expérience théorique et concrète. Le concept n'est pas un objet substantialisé, c'est une possibilité de pensée. Mais le fait de dire que les significations existent à l'état possible, ne nous amène-t-il pas aux idées de Platon? Non, car les possibilités ne sont pas des choses fixes données avant l'expérience, mais des données de l'expérience et les significations seront développées à partir de l'expérience même. Une signification n'est jamais donnée a priori, comme un être préexistant, c'est quelque chose à découvrir ou mieux à construire au moyen de l'expérience théorique ou de l'expérience concrète. Les significations d'un concept forment une série infinie, de sorte que ce concept sera projeté sur une grille infinie de relations. L'essence sera la loi qui relie les termes de la série.

Un concept ne pourrait être défini d'une manière exhaustive à l'aide d'expressions verbales, car la définition ne pourra pas capturer toute la richesse de l'expérience (théorique et pratique). Il est en quelque sorte une expérience, ou c'est par l'expérience qu'il sera affirmé, développé, parfois révisé, corrigé et par suite élargi ou rétréci. En fait, il est projeté sur ses significations, qui sont en changement et en devenir. Par conséquent, le concept devrait rattraper ses significations, afin de conquérir son identité et son individualité.

En géométrie, le concept d'axiome a changé de signification; ayant été, au premier stade, un énoncé évident et intuitif, il deviendra, au stade axiomatique, un énoncé hypothétique puis, au troisième stade, une formule bien formée, primitivement adoptée, et comprise de façon purement formelle: «Nous avons vu tout d'abord diminuer la distance entre l'axiome et l'hypothèse. L'axiome de géométrie, comme l'axiome de logique, était autrefois considéré comme une vérité à la fois indémontrable et nécessaire. On n'hésite pas aujourd'hui à les traiter d'énoncés hypothétiques. Les systèmes axiomatiques eux-mêmes sont parfois définis comme des systèmes hypothético-déductifs. Sans aller jusqu'à faire de l'axiome un énoncé arbitraire — ce qui serait pousser les choses à l'absurde, — il faut admettre que la méthode axiomatique nous a rendu une certaine liberté à l'égard de l'axiome, liberté de le recevoir, de le refuser, de le remplacer par un autre énoncé etc. «Si l'axiome a perdu de sa nécessite relativement à l'hypothèse, l'hypothèse a acquis une certaine réalité par rapport à l'axiome». [2].

Un terme ne peut pas être défini d'une manière exhaustive; la définition ne sera qu'un point d'attache ou un début. Même les définitions axiomatiques, c'est-à-dire les définitions par les schémas axiomatiques, n'aboutiront pas à des

(2) *L'hypothèse de l'atome primitif*, Georges Lemaître, préface de Gonseth, p. 13.

entités fixes. Un nombre défini par les axiomes de Peano n'aura pas d'autre signification que celle de sa position dans la succession de la suite construite qui est une progression arithmétique et qui pourrait commencer par un nombre quelconque. Un nombre défini ainsi, ne rattrapera ses significations qu'au cours des développements de l'arithmétique: «Les concepts mathématiques eux-mêmes ne sont pas immuables. C'est pourquoi, il faut se défendre contre la tentation de considérer les objets du monde de la pensée comme des choses terminées et possédant des caractères et des qualités définitivement fixes.»[3]

Telle est la thèse centrale de Gonseth et tel est le noyau de sa doctrine idonéiste. Cette doctrine, depuis le premier livre jusqu'au dernier, sera défense acharnée des idées de changement de concepts, d'évolution de significations, de l'idée d'ouverture à l'expérience, de la révisabilité et de l'idée de la construction des systèmes abstraits qui assurent le retour au réel.

En examinant toutes les notions de base ou le fondement de la connaissance, en partant des notions intuitives de l'espace concret et du temps réel et en passant par les concepts et les lois de la physique moderne, Gonseth démontra, par des exemples mathématiques et physiques, que les idées de changement, d'ouverture et de révision sont des principes fondamentaux de la pensée. Nous analyserons dans notre travail, la fonction de l'axiome mathématique et logique dans le processus d'abstraction, et son insertion dans des édifices abstraits. Nous recherchons le rôle de l'axiome au sein des schémas abstraits, et son rôle comme élément constructeur dans les différents niveaux d'abstraction. Nous examinerons le changement des significations sur des exemples empruntés aux mathématiques et aux logiques.

Certes, la philosophie idonéiste est chargée de détails techniques concernant les mathématiques et la physique théorique, nous n'analyserons pas toute la pensée de Gonseth parce que pour accomplir cette tâche, il faudrait analyser et examiner minutieusement toute l'œuvre du philosophe, analyser son œuvre mathématique et examiner une dizaine de livres chargés de démonstrations et de techniques qui n'intéressent que le mathématicien. C'est pour cela que nous nous limiterons à étudier en profondeur la genèse de la philosophie idonéiste qui se manifeste dans son œuvre philosophico-mathématique.

I – CHANGEMENT DES SIGNIFICATIONS

Les concepts évoluent, les significations changent de sens, est-ce que ces énoncés ont un sens?

L'évolution suppose que l'entité considérée est dans le temps. C'est en fonc-

(3) *Les mathématiques et la réalité* (nouveau tirage), p. 4 Gonseth.

tion du temps que le concept change et les significations évoluent. Une entité située en dehors du temps sera fixe. Est-ce que les entités mathématiques sont de ce genre? Dire que les significations changent, c'est dire qu'elles sont temporelles ou immanentes aux choses du monde.

Effectivement, les concepts mathématiques, selon la philosophie idonéiste, changent de signification; par exemple, les concepts de droite, de point et de plan en géométrie euclidienne, changent de sens et chacun de ces termes n'a pas de signification fixe ou achevée: «Il est, en effet, facile de dire: «Nous nous proposons de concevoir et de connaître la connexion qui doit exister entre le monde des choses et le monde de nos pensées». — Mais il est infiniment plus difficile d'expliquer de quel ordre sera cette connaissance. Ni l'une ni l'autre des deux expressions: «le monde des choses» et «le monde de nos pensées» n'a de sens parfaitement défini, de signification complètement achevée; par conséquent, la corrélation dont nous parlons ne doit pas non plus être envisagée comme une chose qui posséderait des propriétés et des qualités déterminées d'avance, dont la connaissance pourrait simplement se saisir.»[4]

Comment? La droite intuitive, correctement alignée, l'arête d'une table ou d'un cristal, deviendront par le processus d'abstraction naturel, et par axiomatisation, un être logique ou un terme symbolique aidant à l'axiomatisation de la géométrie rationnelle; de sorte que la droite ainsi idéalisée et axiomatisée sera dépouillée de toutes notions rattachées à l'évidence intuitive, et aura une signification très éloignée de l'intuition sensible. Cette signification est fondée sur un schéma axiomatique, sur des formules logiques et sur des relations logiques elles-mêmes épurées de toute intuition spatiale ou temporelle. Ainsi l'idée de droite apparaît comme une idée ouverte non achevée, capable de recevoir des modifications et des changements dans la direction de l'abstrait et du formel: «Insistons d'abord sur le fait qu'un concept n'a pas une forme donnée une fois pour toutes et un contenu ne varietur. Ainsi la notion de droite nous est apparue trois fois sous des aspects de plus en plus dépouillés: une première fois comme représentation intuitive accessible même à l'esprit resté vierge de culture mathématique et telle que l'évoquent les expressions: «droit devant soi» ou «sans incliner ni à droite ni à gauche». Le second avatar peut être placé sous le signe de la relation logique. Il n'est pas vrai que le dernier remplace les précédents et les détruise. Il ne peut exister sans eux, sans y fonder son sens, sans en recevoir sa substance».[5]

Une droite change de signification à chaque étape d'abstraction. Elle est

(4) *Ibid.* pp. 5 et 6.
(5) *Ibid.* p. 89.

intuitive, expérimentale, au premier stade, elle est suggérée par l'expérience immédiate et considérée comme une substance ou un être sensible, qui entre intuitivement dans la déduction, ou les propriétés utilisées sont des évidences intuitives. Par exemple l'énoncé: «Si trois points sont alignés sur une droite, l'un d'eux se trouve alors entre les deux autres», et ainsi de suite.

Dans la première phase, ce sont les données sensibles qui suggèrent les idées primitives de la géométrie. Une droite est un objet sensible qui a une existence matérielle et qui sera le support d'une abstraction naturelle au moyen de laquelle, la conscience forgera une entité abstraite qui sera immanente à cet objet sensible. Par conséquent l'existence de l'entité géométrique sera conditionnée par l'existence de l'objet sensible. L'arête d'une table, un trait rectiligne fondaient la notion de la droite. Si la thèse idonéiste commence par le sensible, pourrait-on dire que tout être mathématique, en dernière analyse, est un objet sensible idéalisé ou un objet sensible modulé et façonné et conservant une substance immuable? En termes plus précis, comment l'objet sensible concret quitte-t-il le monde sensible et entre-t-il dans le monde abstrait? Est-ce-que c'est le même objet originel qui entre dans le monde abstrait? Ou bien est-ce un autre objet de nature différente qui sera construit?

A la deuxième phase, c'est la droite qui entre dans le processus déductif de la géométrie. C'est avec Euclide que commence l'axiomatisation parfaite, mais sur des éléments suggérés par l'intuitif. La droite, quoiqu'elle soit encore imprégnée de l'expérimental, deviendra un objet rationnel soumis à des règles et à des hypothèses bien définies.

En arrivant au stade de l'axiomatisation , pouvons-nous nous demander si le processus d'axiomatisation permet de définir l'objet mathématique d'une manière autonome? Autrement dit, une base axiomatique cohérente permet-elle de définir la droite ou l'objet mathématique dans la plénitude de sa signification?

Donner une définition parfaite est contraire à l'esprit de la philosophie idonéiste. Une définition exhaustive ne pourrait être obtenue qu'après une longue suite d'opérations d'axiomatisation et d'abstraction. Une définition complète s'oppose à l'idée d'ouverture et à l'idée d'évolution perpétuelle. En fait, donner une définition c'est faire circonscrire l'idée par des expressions verbales qui fixeront l'avenir de cette idée. Car l'essence de la notion est toujours en dehors de la notion essence qui se détermine par une série d'expériences théoriques et pratiques. Par conséquent, la définition verbale ne pourrait pas encadrer l'évolution indéfinie de la notion. Cette essence est toujours projetée sur des expériences qui, par leur instabilité, changeront l'aspect de la notion.

Une définition verbale n'est jamais complète, ne constitue que partiellement l'essence de la notion, c'est un point de départ, un point d'attache, elle sera révisée, complétée et transformée. On peut dire que c'est une définition ouverte: «D'ailleurs, l'idée même de la définition purement verbale explicite ou implicite apparaît fortement engagée dans l'attitude précritique»[6]

Gonseth est contre les définitions verbales; une entité mathématique ne peut pas être définie par des expressions logiquement correctes. Un concept, que ce soit mathématique ou logique, a un passé, il a une histoire qui remonte aux notions primitives rencontrées dans l'intuition sensible. Certes, à un niveau d'abstraction donné, on pourra définir de nouvelles entités et construire de nouveaux objets abstraits, mais une analyse approfondie révèle un noyau intuitif ou des traces intuitives, dans ces objets. Un concept idonéiste est vivant, ouvert à l'expérience, se modifie et se façonne selon son adaptation, dans un niveau d'abstraction déterminé: «Ceci pour rappeler encore une fois qu'un concept «vivant» ne se crée pas de toutes pièces par une définition purement verbale, mais qu'il sort de son passé et se modifie par son emploi. Combien un mot peut être de proche en proche detourné de son sens originel, combien le concept qu'il recouvre peut varier par dégradations insensibles et quelquefois par sauts brusques, le mot d'axiome en est maintenant un exemple frappant. Qu'était-il pour Platon? L'expression d'une vérité en soi! Pour Poincaré? Une convention a peu près librement consentie. Pour Russell? Un jugement hypothétique. Pour Zermelo? Au sein du système de base, une partie intégrante d'une définition implicite».[7]

Une notion donnée se trouvant dans un plan d'abstraction est rattachée originellement à un autre plan de niveau plus bas d'où elle tire sa signification extérieure et sera projetée vers des plans d'abstraction plus hauts d'où elle tirera sa signification rationnelle. De sorte qu'elle sera suspendue entre un passé et un futur plus riche, et la définition verbale ne pourrait jamais prédire toutes ses significations ultérieures.

Une base axiomatique suffira-t-elle pour définir les notions mathématiques? Une base axiomatique adoptée admettra plusieurs modèles d'éléments différents qui satisfont aux axiomes proposés; par exemple, des éléments de la géométrie euclidienne peuvent interpréter la géométrie non-euclidienne. On a aussi les modèles de Poincaré, de géométrie elliptique (Gerbe): «Ce qui est droite dans l'un est peut-être un cercle dans l'autre: les axiomes ne suffisent donc pas à eux seuls pour conférer une individualité parfaite à chacune de ces deux notions. D'autre part, il n'est pas douteux que d'une certaine façon nous réalisons cette

(6) *Ibid.* p. 138.
(7) *Ibid.* p. 236.

individualité, et que nous avons le moyen de distinguer entre les différents modèles. Le fondement de cette individualisation se trouve donc dans «l'idée même» de la droite et du cercle, c'est-à-dire dans nos représentations intuitives, dans la sphère qui précède l'axiomatisation. Si nous persistons à vouloir définir la droite par les axiomes, c'est tout au plus comme relation logique que nous avons quelque chance d'y parvenir. Mais alors la définition ne saisit plus rien de ce qui est en elle image et représentation idéalisées: la droite dans la plénitude de son sens échappe à l'étreinte des seuls axiomes.»[8] Par conséquent, la base axiomatique ne constituera pas une condition suffisante d'une définition autonome, l'axiome ne saurait être une définition proprement dite, c'est un moyen de déduction et parfois une proposition contenant une déduction et c'est le contraire de la philosophie idonéiste de donner des définitions achevées ou des êtres préexistants.

Cela étant, ne serait-il pas paradoxal de raisonner sur des concepts instables ou plutôt inachevés? En d'autres termes, l'objet mathématique ne serait-il pas, par conséquent indeterminé? Et comment pourrait-on établir l'individualisation de cet objet? Comme une base axiomatique donnée peut être interprétée de plusieurs façons, le processus d'axiomatisation, seul alors, ne suffit pas pour établir l'individualité en dehors du schéma axiomatique.

Si l'individualité de l'objet mathématique est en dehors du schéma axiomatique, on pourrait se demander alors d'où vient cette individualité et de quel droit on parle de droite, cercle etc. De quel droit parle-t-on de l'entité mathématique bien qu'elle soit instable, inachevée et que la base axiomatique n'assure pas pour elle une autonomie parfaite? Gonseth répondait: «Le fondement de cette individualisation se trouve donc dans «l'idée même» de la droite et du cercle, c'est-à-dire dans nos représentations intuitives, dans la sphère qui précède l'axiomatisation.»[9]

D'où vient l'identité à la notion de la droite utilisée dans les propositions géométriques? Comme l'identité implique l'individualité, alors, d'après Gonseth, la droite axiomatisée trouve son identité dans le schéma axiomatique et dans le plan intuitif préaxiomatique. Il en résulte que l'entité mathématique se trouve scindée en deux composantes, l'une appartient au plan rationnel et l'autre au plan intuitif. Cette entité sera l'unité synthétique de ces deux composantes. En fait, cette décomposition de l'entité mathématique établit au sein de la thèse idonéiste une rupture entre le rationnel et l'intuitif.

---

(8) *Ibid.* pp. 90-91.

(9) *Ibid.* p. 91.

Nous verrons ultérieurement que la soudure s'effectuera à l'aide de l'axiomatisation schématique, de sorte que la thèse idonéiste sera un édifice d'abstraction, étagé et continu depuis l'intuitif sensible jusqu'au rationnel formalisé. En réalité, l'essence de l'axiome réside dans les relations logiques qui lient les différents éléments primitifs. Faut-il rechercher la signification de la droite dans ces relations? Une relation est aussi une entité logique qui aura deux composantes, l'une intuitive et l'autre rationnelle. Et comme plus haut, il y aura en logique une lacune et un saut entre l'intuitif et le rationnel et nous aurions deux mondes distincts, l'un concret et l'autre rationnel. Qu'est-ce qui fera la soudure et la continuité de ces deux mondes? La thèse idonéiste est une thèse de continuité, l'intuitif se prolonge dans le rationnel et constitue la base nécessaire du rationnel. Le rationnel se constitue par la projection de l'intuitif dans des plans d'abstraction successifs: «Les idées abstraites, les notions géométriques telles que celles de droite ou de point, par exemple, sont en continuité avec les données intuitives dont elles sont sorties. Elles ne font que reprendre à leur compte et que prolonger le rôle des qualités élémentaires dans la construction du réel.»[10]

Donc les schémas axiomatiques avec les relations logiques ne suffiront pas seuls à édifier le rationnel. Le processus logique pur reste incapable d'édifier un système autonome et une théorie authentique. Il est vrai que la construction de tels édifices est toujours possible, mais ces édifices obtenus, par construction, restent artificiels.

Un système cohérent est toujours possible, il est facile d'imaginer des éléments quelconques et de leur conférer des propriétés imaginaires; de sorte que le système serait autonome et ne présenterait intérieurement aucune contradiction. Mais que représente ce système par rapport au réel, et comment s'applique-t-il aux données de l'expérience concrète?

Un système axiomatisé dans un plan d'abstraction donné, doit être lié à un plan d'abstraction antérieur d'où il tire ses significations et ses fondements et au plan postérieur d'où il tire de nouvelles significations: «Il se confirme donc encore une fois que l'abstrait ne peut pas revendiquer une existence autonome: ceci suffit pour écarter l'idée selon laquelle les axiomes représentent des conventions posées librement pas l'esprit. Enfin, l'exemple du géométrique montre clairement que, par la constitution d'un schéma axiomatique, il se crée à la fois un abstrait et un concret relatif à ce dernier. Dès qu'on a franchi la première étape de l'axiomatisation, les êtres géométriques sont des abstraits vis-à-vis de l'intuitif. Celui-ci en reçoit comme l'empreinte opposée et se trouve repoussé

(10) *Ibid.* p. 67.

vers le concret. Le même phénomène se reproduit une fois le second seuil franchi, c'est maintenant le géométrique qui joue le rôle d'objet vis-à-vis du logique.»[11]

La méthode axiomatique pure, qui est d'une nécessité fondamentale, ne suffit pas à édifier la mathématique; c'est une méthode nécessaire mais non suffisante. Elle crée des objets mathématiques qui manquent d'individualité: «La thèse générale que nous défendrons au courant de ces leçons, est au contraire la suivante. Il n'est point de domaine des mathématiques, se petit soit-il, où l'axiomatique puisse se suffire à elle-même. Et c'est seulement après s'être pénétré de ce fait qu'on rendra aux mathématiques pleine justice et qu'on aura la possibilité d'apprécier leur véritable rôle dans la constitution d'une «philosophie naturelle», but ultime sinon réalisable de l'effort scientifique. La croyance en la possibilité de réduire les mathématiques à un simple jeu de formules repose sur une erreur dont l'origine est peut-être à rechercher dans le qualificatif «abstrait».[12]

Chaque notion abstraite, dans un plan donné, doit être rattachée au plan précédent, par suite elle ne peut pas être une simple convention ou une simple construction verbale. L'axiome qui est une proposition composée, est aussi rattaché à un plan d'abstraction antérieur; c'est pourquoi il ne pourrait être une libre convention. La méthode axiomatique permet de construire des abstractions et des structures de plus en plus abstraites. L'axiome qui est le fondement de cette méthode est un énoncé formé par des relations logiques liant des éléments primitifs. Par exemple: «Par deux points distincts on peut faire passer une droite.». Cet énoncé est fondé sur une relation logique dont l'existence appartient à la logique pure.

Avant d'analyser la notion d'axiome et étudier son degré d'abstraction, nous allons étudier la notion de la relation logique. Nous verrons que, quelle que soit la notion étudiée, elle est toujours régie par les principes de la philosophie idonéiste, à savoir l'inachevé, le révisable, l'ouverture et le devenir.

II – RELATIONS LOGIQUES

La notion de relation ou de liaison logique est-elle abstraite du concret empirique? Sera-t-elle une idée suggérée par les liaisons expérimentales?

Dans la vie courante, on a plusieurs exemples de relations ou liaisons concrètes. Une liaison est rencontrée dans l'intuitif ou elle sera prolongée et projetée dans le rationnel. D'ailleurs une relation ne peut pas exister indépen-

(11) *Ibid.* p. 92.

(12) *Les fondements des mathématiques*, Gonseth, p. 13.

damment de ses réalisations, en toute autonomie; ce n'est pas une idée platonicienne, ni une chose particulière qui existe dans le monde des choses telles que arbre, maison etc. Est-elle une classe formée par des couples d'éléments donnés? En termes plus précis: Est-elle identifiée à la classe des couples qui vérifient une certaine propriété? Pour les mathématiciens: «Il est concevable de penser chaque relation comme étant une classe dont les éléments sont des couples»[13]. Dans cette définition la relation est identifiée avec l'extension qui est la classe; la relation sera une classe ou un ensemble de couples.

Au point de vue logique pur, il y a une différence de niveau entre éléments et classe. La relation est un abstrait d'ordre plus élevé que ses éléments. Une relation peut être un prédicat dyadique R (x,y). Ce prédicat lui-même engendre une classe qui sera un objet différent logiquement du concept prédicat. Le prédicat peut être donné d'avance avec précision. Il peut avoir une compréhension parfaitement déterminée, tandis que la classe associée ne sera pas toujours achevée. Quand je dis «... être un triangle rectangle» je comprends parfaitement le contenu de ce concept, il a une compréhension bien délimitée, c'est un triangle qui a un angle droit. Quelle sera la classe associée à ce concept? Quel est le nombre des triangles rectangles? Le cardinal de cette classe ne sera-t-il pas aleph? Il est impossible d'énumérer une telle classe; il y a autant de triangles qu'il y a de points dans le contenu. C'est une classe qui existe en puissance, c'est la «compréhension» qui définit cette classe. Par conséquent, une relation peut avoir une définition bien détérminée, et une extension mal détérminée. Parfois, il est possible de trouver un critère d'appartenance. Prenons l'exemple suivant: soit R la relation définie ainsi: Deux nombres irrationnels sont liés par R s'ils ont une infinité dénombrable de chirffres égaux après la virgule; par exemple:

$$\sqrt{2}\ R\ (\sqrt{2} - 1)\ ,\ \sqrt{3}\ R\ (\sqrt{3} - 1)$$

Il y a une infinité de tels couples, pourtant il est impossible de construire complètement la classe correspondante, car on ne possède par de critère d'appartenance qui permette de décider si deux nombres irrationnels sont liés ou non par R. Une relation, par conséquent, ne peut pas être identifiée à son extension. Dans l'exemple de la relation R, il existe une partie inconnue de l'extension de cette relation. Même le principe du tiers exclu de la logique classique sera impuissant à l'égard d'une telle relation. Prenons les nombres $\sqrt{7}$ et $\sqrt{11}$. Peut-on écrire $\sqrt{7} \not{R} \sqrt{11}$? Non. Le problème est confus, car il n'existe pas de loi de formation des chiffres des nombres irrationnels $\sqrt{7}$ et $\sqrt{11}$. Par conséquent l'être d'une relation dyadique ne se trouve pas dans l'extension de sa classe. L'essence de son être se trouve dans sa

(13) *Mathematical Logic,* pp. 198 36. Quine.

compréhension. Donc la définition par extension ne fait pas une différence de niveau entre les deux entités, classe et relation; car une relation peut être parfaitement donnée, par compréhension, tandis que la classe associée pourrait être inachevée et la connaissance individuelle y serait parfois impossible, comme la classe de nombres réels compris entre 0 et 1.

Prenons un autre exemple: deux nombres irrationnels sont liés par une relation I si dans leurs développements décimaux, un chiffre donné se répète identiquement un nombre égal de fois; par exemple, le nombre 1 se trouve dans les développements décimaux de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ et il est impossible de prouver que le nombre 1 se répète un nombre égal de fois dans les deux développements.

Par suite, il est impossible de former la classe associée de I. Bien que la relation I soit parfaitement définie, néanmoins sa classe correspondante n'est jamais déterminée. En fait, les ordres d'existence de I et de sa classe sont abstraitement différents.

Quelle sera alors la relation selon la thèse idonéiste? Gonseth explique la notion de liaison logique comme étant un abstrait dégagé de l'expérience intuitive ou concrète. L'idée de liaison logique est à abstraire de tout ce qui est liaison de fait ou relation dans les ordres les plus divers. Objet A à côté de B, objet x sur y, à gauche, à droite, plus grand, plus petit, des relations temporelles et causales etc. Toutes ces relations appartiennent à l'expérience empirique et à l'expérience théorique: «N'avons-nous pas insisté sur le fait que le nouveau concept est à abstraire de tous les exemples de relations rencontrés au stade spécifiquement géométrique?»[14]

La notion de liaison commence par l'intuitif et se prolonge vers le sommet le plus abstrait, dont les actualisations se réalisent par les différents faits empiriques et théoriques. L'intuitif étant constitué par des jugements et des données immédiates, dont l'essence est fondée sur cette immédiateté, sera la base de toute relation rationnelle. Une relation, au sens idonéiste, est une forme logique pure qui domine ses actualisations particulières et qui est inséparable de ses réalisations. Une entité idonéiste est un abstrait dégagé d'un autre abstrait ou construit au moyen d'autres abstraits; de sorte que l'abstrait construit domine tous les abstraits antérieurs. Le monde idonéiste ressemble à un ensemble infini de cônes; telle que la base de chaque cône est le lieu des sommets d'autres cônes dont le degré d'abstraction est plus petit que le degré de ce cône. Les abstraits seront dégagés de la base du cône et seront concentrés au sommet en un point plus élevé. Ce point et d'autres se rassemblent dans la base d'un autre cône, de degré d'abstraction plus élevé. Les notions concentrées au sommet se dispersent

(14) *Les Maths et la réalité*, p. 253.

dans la base d'un nouveau cône pour former les éléments d'un nouveau système et ainsi de suite. En fait, le sommet du cône n'est pas séparable de la surface du cône, il est plus élevé, au-dessus du cône mais fait partie de la surface; de sorte que sans ce point le cône ne serait plus un cône et ce point n'existerait pas sans la surface du cône. Il en résulte que le concept n'existe pas en dehors de ces actualisations, il trouve son individualité dans chaque cas particulier: «Le réalisme platoncien doit être refoulé des dernières positions qu'il occupe encore dans les mathématiques et la logique, le concept éternellement fixe doit partout céder la place au concept en devenir.»[15]

Un concept et un principe de pensée ne pourraient pas être posés a priori. Un principe n'existe qu'en état d'application, et son existence ne peut pas être séparée de ses applications. Certes, on pourrait poser un principe a priori, mais à titre provisoire. Un concept pourrait être défini, au début, mais il n'aurait le droit d'exister effectivement qu'en fonction de ses applications et de son succès. Il est toujours sujet à des vérifications et à des corrections, et son affirmation ou sa négation dépendront de son efficacité ou de sa validité.

Quelle serait alors l'essence de la relation selon la thèse idonéiste?

Rappelons tout d'abord que la thèse idonéiste est une thèse de continuité, n'admettant pas de ruptures ou de sauts, les niveaux d'abstraction seront liés par leurs bases et leurs sommets. Un concept abstrait qui se trouve à un niveau donné ne pourrait être détaché et suspendu en l'air, sa signification n'est jamais déterminée dans le même niveau, il est toujours tourné vers le haut et vers le bas. Les abstraits seront hierarchisés depuis le plus réel jusqu'au plus abstrait, de telle sorte qu'il y aura toujours un mouvement et une évolution. Donnons-nous un exemple empirique. Désignons par P la relation «père de». C'est une relation empirique concrète et elle trouve ses réalisations dans l'expérience quotidienne. Elle satisfait à certaines propriétés telles que celle d'être non réflexive, asymétrique, intransitive. Est-elle parfaitement définie? Et quelle est sa signification? Ses réalisations se traduiront par les couples: (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , ...

Peut-on écrire avec les mathématiciens:

$$P = (x_1, y_1) . (x_2, y_2), \ldots$$

c'est-à-dire peut-on identifier P avec sa classe associée? Les éléments de P sont des couples. Cette relation ne se trouve pas en dehors de chaque couple. En effet, x_1 *est père de* y_1 est un fait, un fait de mariage social ou conventionnel, de sorte que cette relation n'a pas de sens en dehors de ses réalisations concrètes. Sous

(15) *Ibid.* p. 32.

ces conditions il serait absurde et denué de sens de dire avec les mathématiciens que cette relation est une classe. Cette relation se trouve dans chaque couple, et la classe est évidemment en dehors de chaque couple. La classe ne jouit pas des propriétés de ses éléments. «Père de» est dans chaque couple, il n'est pas dans la classe, car la classe n'est pas un couple, elle est en dehors de ses couples. Donc l'essence de la relation réside dans chaque couple et dans les couples à déterminer et aussi dans l'abstrait dégagé de ces couples.

Dans ce cas, l'abstrait n'aura aucune existence autonome, indépendante de tout réel, c'est un universel actualisé dans le réel et dégagé du réel. Par conséquent, une relation ne peut pas exister rationnellement d'une manière absolue isolée de ses réalisations; de sorte que le concept de relation sera suspendu entre deux mondes, une de ses faces est tournée vers le concept et une autre vers le rationnel. Il n'y aura pas de relation sans l'abstrait à la structure duquel elle participe.

Une relation logique suppose l'existence d'objets logiques, qui formeront les éléments du rationnel. Un objet logique à un niveau donné est un abstrait plus ou moins vidé de son contenu intuitif, c'est une forme qui assure la distinction dans l'ensemble des objets logiques. C'est un point d'attache et un support pour la conscience engagée. N'étant pas un objet concret ou mental, il sera une sorte de prise de conscience, de sorte que l'acte de pensée se reporte sur une forme de pensée, ou la pensée se pense et se refléchit en elle-même: «Il faut, pour y parvenir, faire abstraction de tout ce qui pourrait être propriété individuelle d'un objet matériel ou d'un objet de pensée, l'objet logique ne doit avoir ni étendue, ni forme, ni grandeur, ni couleur, etc. Il ne doit être ni homme, ni cheval, ni métal, ni figure géométrique, ni nombre, ni propriété de nombre, ni classe, ni ensemble, etc. L'objet logique n'a d'autres propriétés a priori que de pouvoir être conçu comme différent d'autres objets logiques, et de pouvoir servir de point d'attache à certaines liaisons logiques.»[16]

Dans ces conditions, pour arriver à concevoir l'objet logique, il faudrait faire un effort d'abstraction et passer d'un niveau à un autre afin d'éliminer ce qui est particulier à l'objet. L'objet logique est un abstrait pur, une existence pure. Comment alors concevoir la différence entre deux objets logiques?

(16) *Ibid.* p. 269.